

75º Jornada de Educación Matemática

Punta del Este, 17 de Mayo de 2014

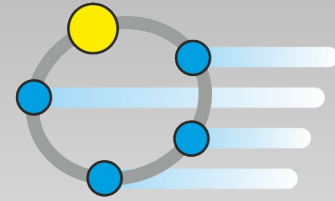
Enseñar Análisis con GeoGebra

Gonzalo Galván

Sebastián Parodi

Fabián Vitabar

Instituto GeoGebra de Uruguay



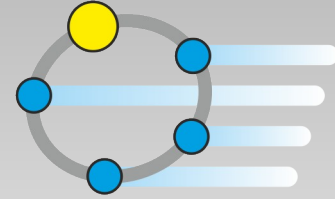
Enseñar Análisis con GeoGebra

Aprovechamiento didáctico

Representación Gráfica de Funciones

Múltiples Vistas Gráficas

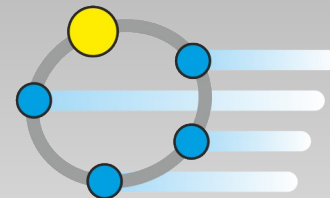
Vista CAS



Enseñar Análisis con GeoGebra

Aprovechamiento didáctico

Representación Gráfica de Funciones



Vistas Gráfica - Algebraica

GeoGebra

Archivo Editar Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Conectar

Vista Algebraica Vista Gráfica

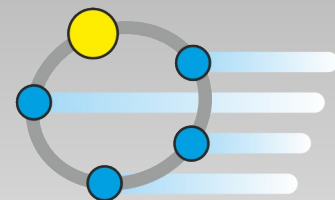
Barra de Herramientas

Barra de Entrada

Entrada:

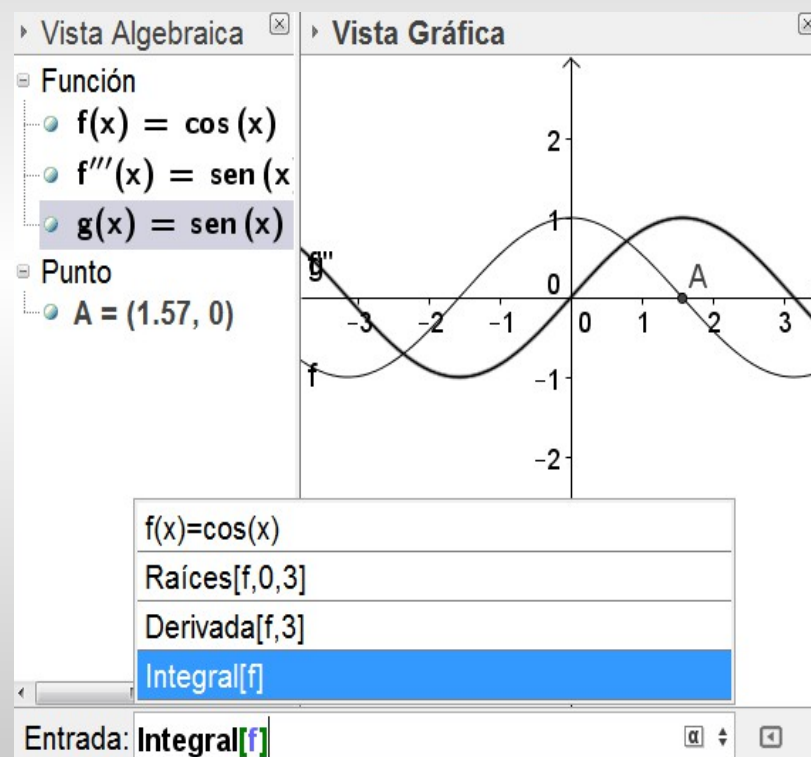
Vista Algebraica

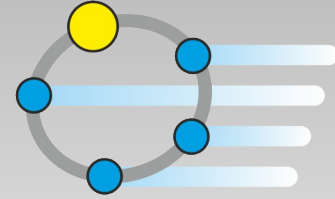
Vista Gráfica



Empleo de la Barra de Entrada

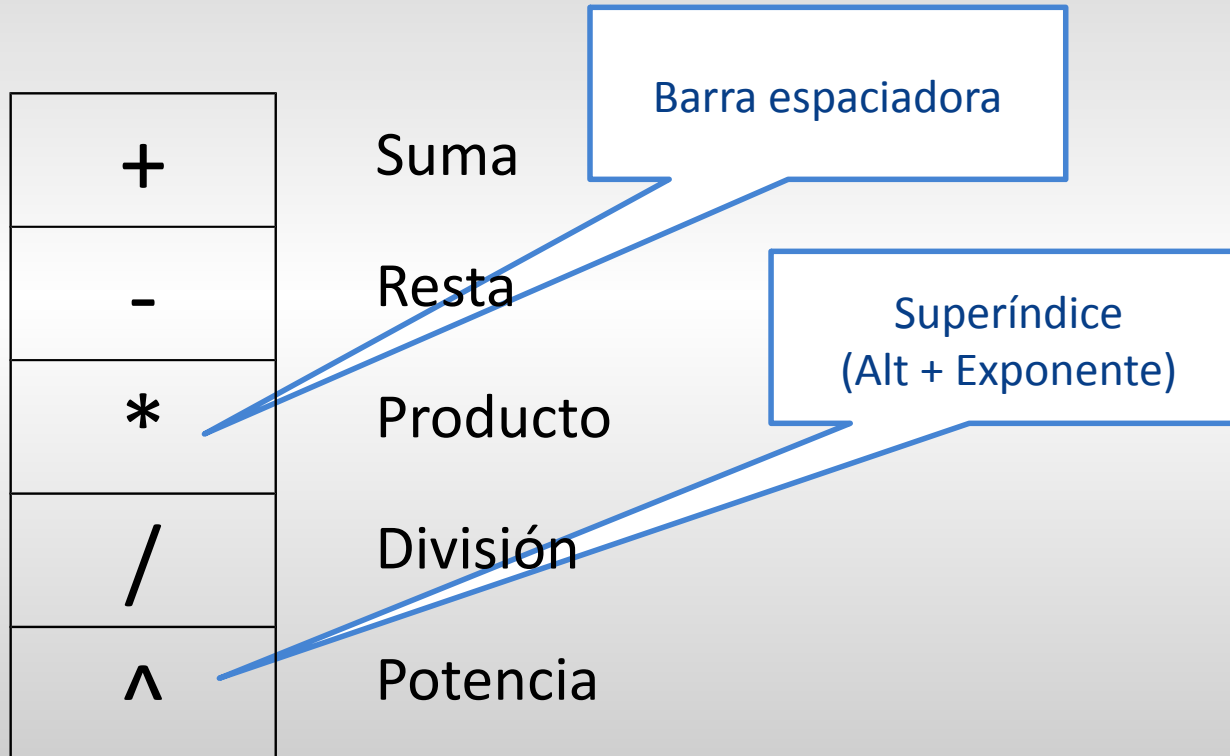
Intro	Ejecuta la entrada
Escape	Borra la entrada
↑	Entrada previa
↓	Entrada siguiente
F1	Ayuda sobre el comando actual

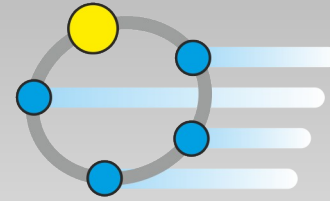




Empleo de la Barra de Entrada

Operadores





Empleo de la Barra de Entrada

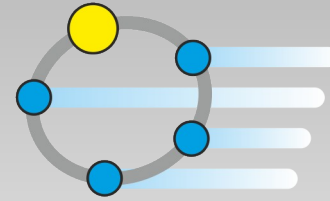
Símbolos:

Alt + p	Alt + p	π
	Alt + i	i
	Alt + e	e
Alt + i	Alt + p	π
	Alt + i	i
	Alt + e	e
Alt + e	Alt + p	π
	Alt + i	i
	Alt + e	e

α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ	ι	κ
λ	μ	ν	ξ	$\omicron$	ρ	σ	τ	υ	φ
ϕ	χ	ψ	ω	Γ	Δ	Θ	∞	$\otimes$	$\equiv$
$\neq$	$\leq$	$\geq$	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\parallel$	$\perp$	$\in$
$\subseteq$	$\subset$	$\nsubseteq$	2	3	$^\circ$	$\acute{\iota}$	π	e	
$\ll$	$\gg$	€							

Entrada:





Representación gráfica de funciones

$\text{sqrt}()$
$\text{cbrr}()$

Raíz Cuadrada

Raíz Cúbica

$\text{cos}()$
$\text{sen}()$
$\text{tan}()$

Coseno

Seno

Tangente

$\text{exp}()$
$\text{ln}()$
$\text{lg}()$
$\text{log}(b, x)$

Función Exponencial

Logaritmo neperiano

Logaritmo de base 10

Logaritmo de base b de x

Ayuda de comandos

- Funciones Matemáticas**

- Todos los comandos

- Álgebra

- Cónica

- Diagrama

- Estadísticas

- Funciones y Cálculo

- GeoGebra

- Geometría

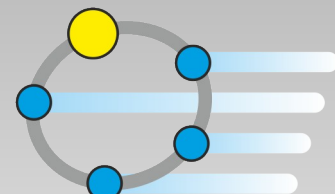
Pega

Mostrar ayuda en línea



Entrada:





Actividad 1

- (a) Representa:

- Una función f (por ejemplo, $f(x) = \cos(x)$)
- Dos deslizadores numéricos llamados a y b
- Dos rectas p y q de ecuaciones $x = a$ y $x = b$ respectivamente.

(b) Ingresa los siguientes comandos en la barra de entrada y analiza los resultados que provocan.

Raíz[f,a,b]

Raíces[f,a,b]

Máximo[f,a,b

Derivada[f]

Derivada[f,3]

Integral[f,a,b]

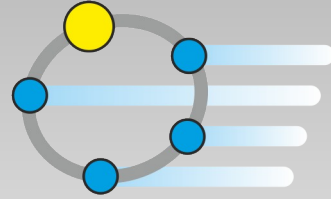
SumaSuperior[f,a,b,10]

SumaInferior[f,a,b,10]

PolinomioTaylor[f,a,4]

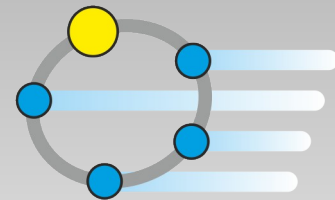
Límite[f,a]

Actividad 1 (continuación)



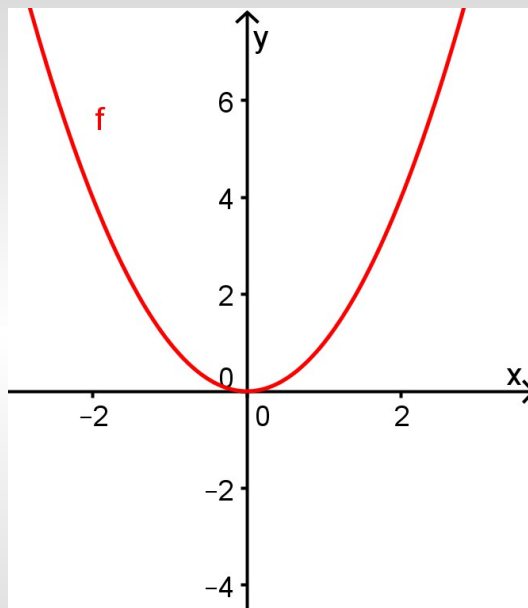
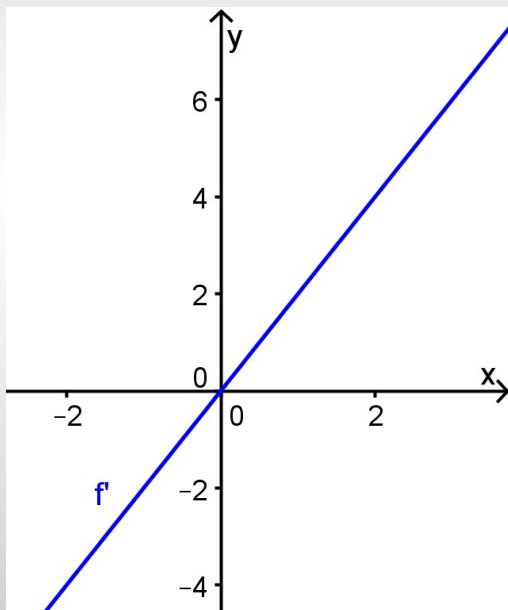
(c) Modifica los deslizadores, o la expresión de la función y verás cómo se actualizan los resultados.

(d) Investiga qué otros comandos ofrece GeoGebra, cliqueando en el ícono ubicado en el extremo inferior derecho de la pantalla.

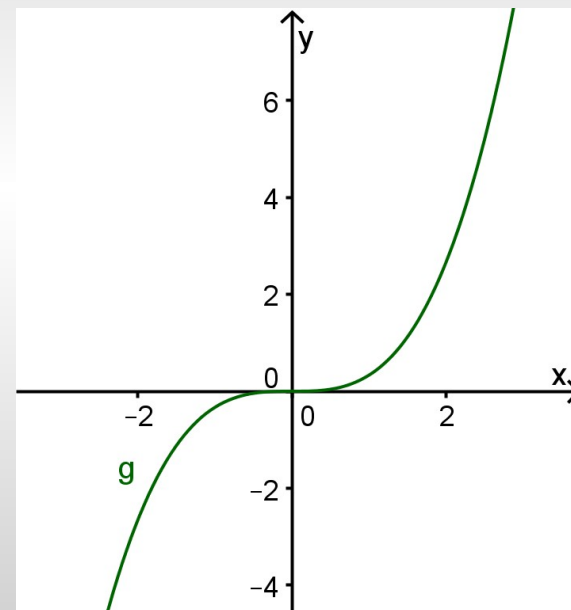


Representación gráfica de funciones

Derivada $[f]$

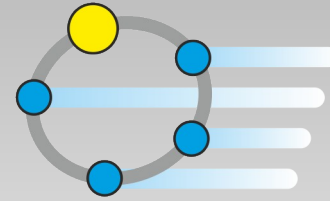


Integral $[f]$



$$f: f(x) = x^2$$





Representación gráfica de funciones

Definidas en un intervalo

Si $[0 \leq x \leq 2, x^2]$

La función queda
definida en $[0; 2]$

► Vista Algebraica

Función

$f(x) = x^2 \quad (0 \leq x \leq 2)$

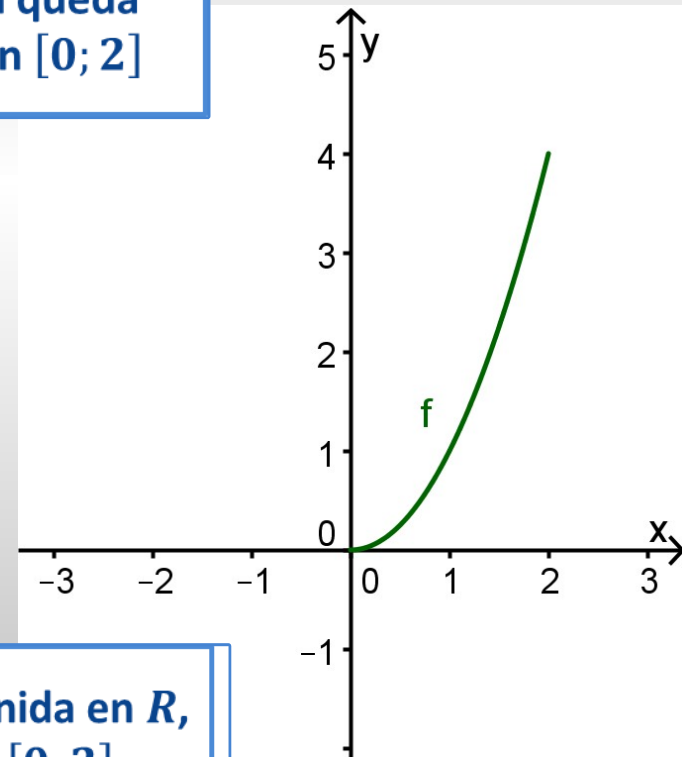
Función $[x^2, 0, 2]$

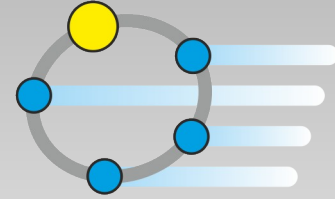
► Vista Algebraica

Función

$f(x) = x^2$

La función queda definida en R ,
pero se grafica en $[0; 2]$





Representación gráfica de funciones

Definidas por tramos

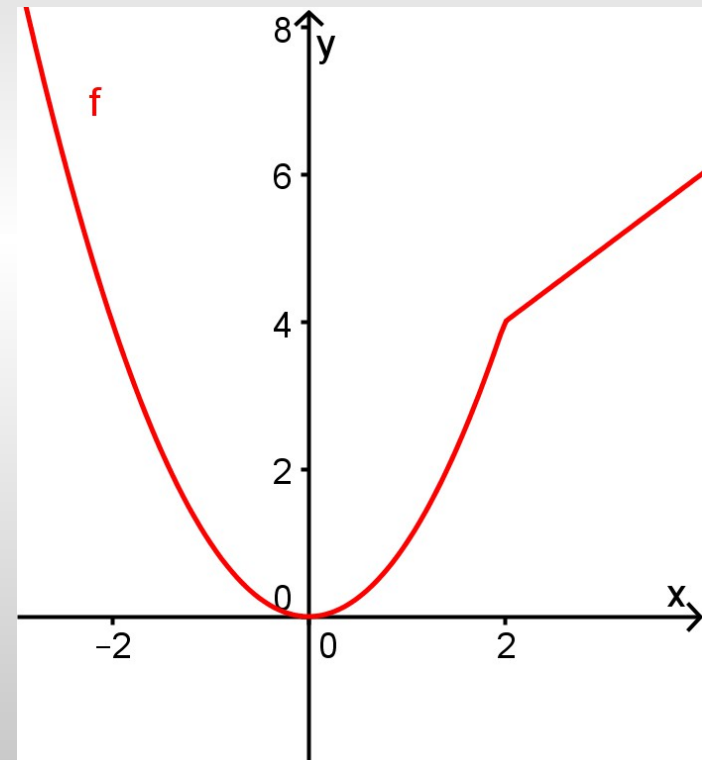
Si $[x \leq 2, x^2, x + 2]$

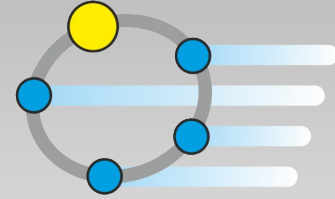
Vista Algebraica

Función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \leq 2 \\ x + 2 & : \text{en caso contrario} \end{cases}$$

¿Cómo se grafica una función definida en tres tramos?

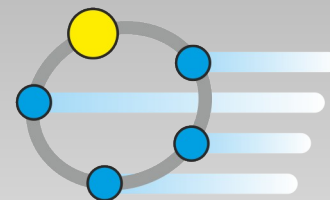




Enseñar Análisis con GeoGebra

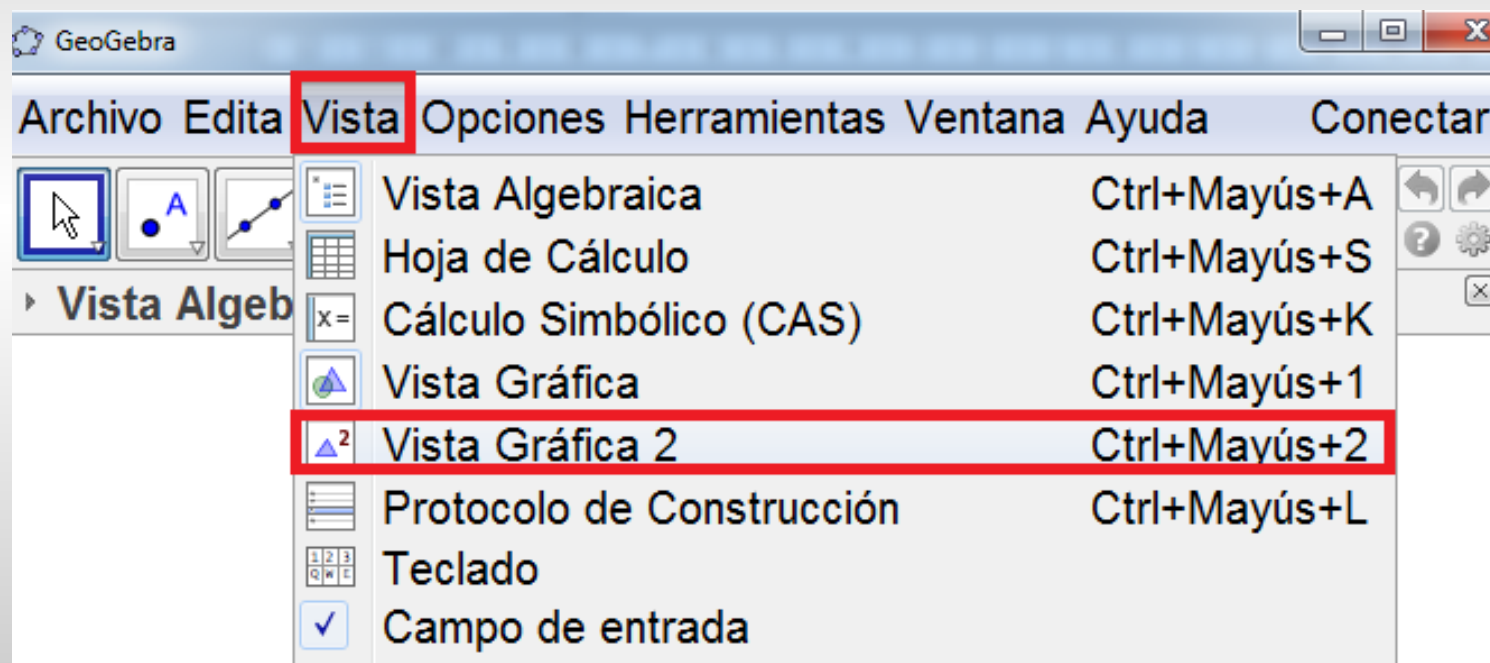
Aprovechamiento didáctico

Múltiples Vistas Gráficas

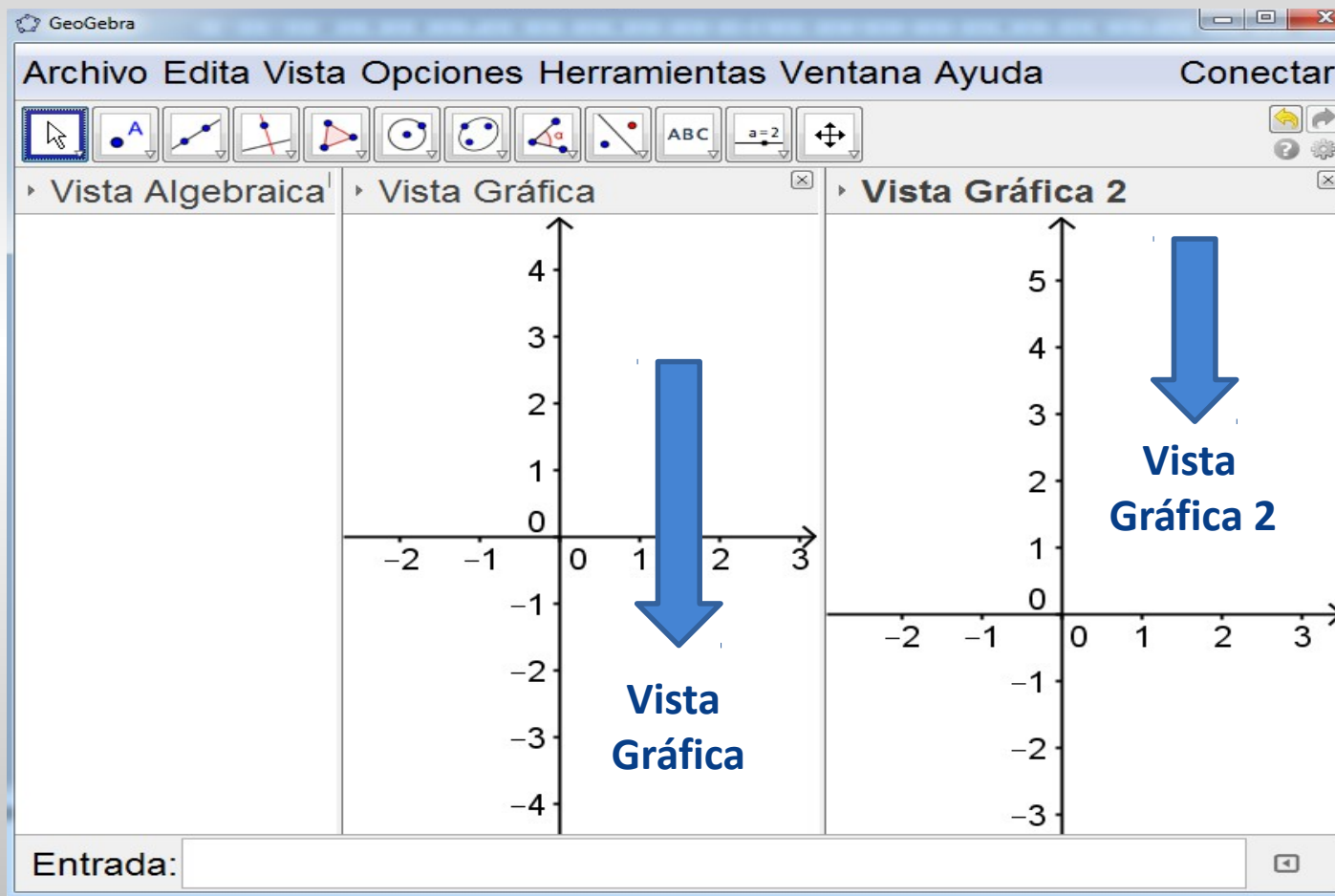
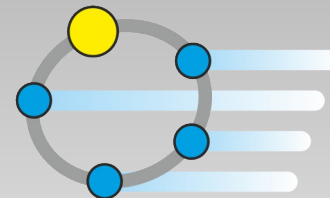


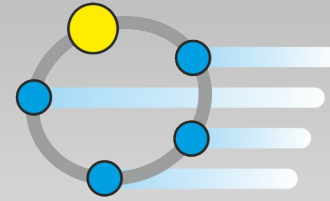
Múltiples Vistas Gráficas

GeoGebra incorpora la Vista Gráfica 2 a partir de la versión 4.4



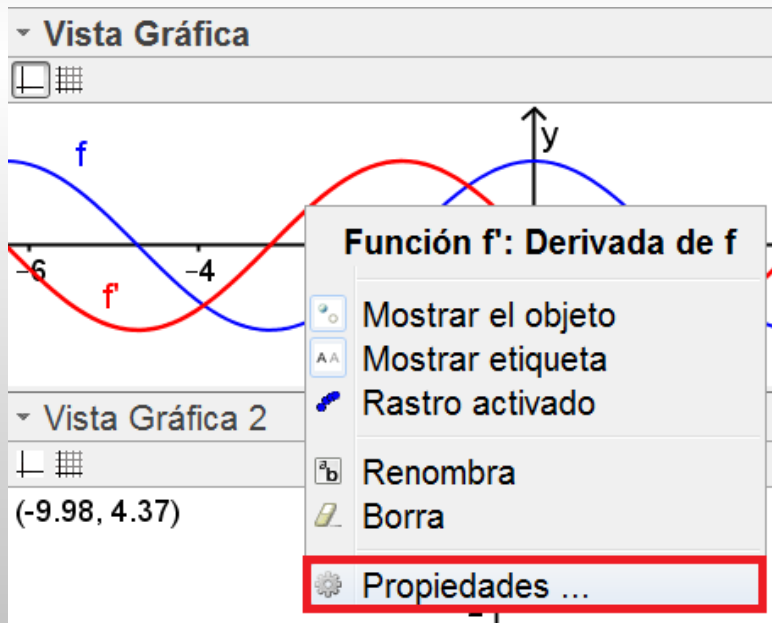
Múltiples Vistas Gráficas





Múltiples Vistas Gráficas

¿Cómo pasar un Objeto de una Vista Gráfica a la otra?



Básico | Color | Estilo | **Avanzado** | Programa de guión (scripting)

Condición para mostrar el objeto

Colores dinámicos

Rojo:

Verde:

Azul:

RGB (Rojo-Verde-Azul)

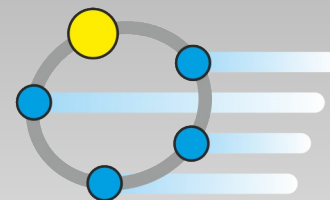
Capa:

Indicación:

☒ Permitir seleccionar

Ubicación

☒ Vista Gráfica ☒ **Vista Gráfica 2**



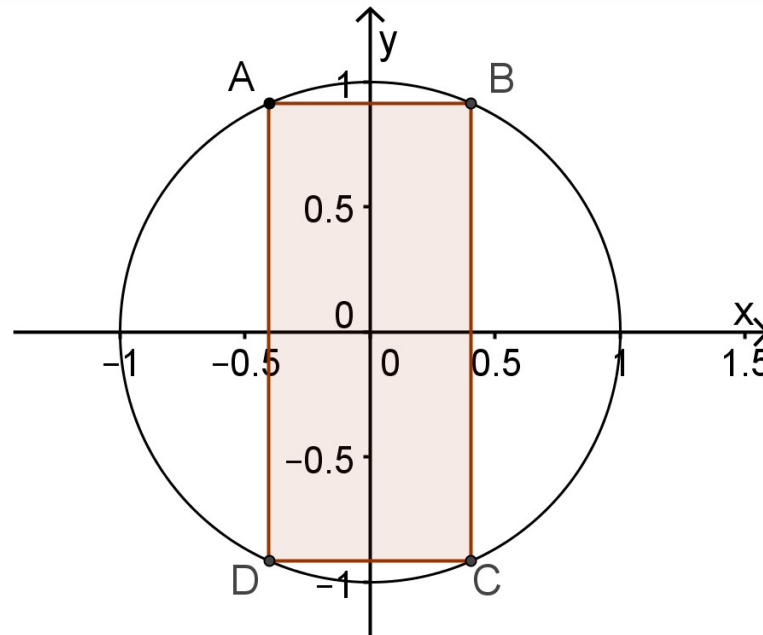
Actividad 2

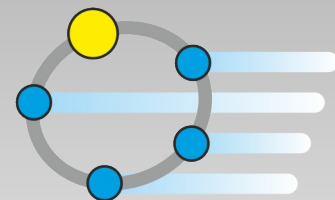
Genera un modelo que permita visualizar las estrategias empleadas para la resolución del siguiente problema:

Abre el archivo *Actividad2.ggb*.

Encontrarás representado un cuadrilátero $ABCD$ como el de la figura y un deslizador t .

- (a) Modifica el valor de t y observa cómo se actualiza la figura.
- (b) ¿A qué objeto está asociado t ?
- (c) ¿Qué características tiene $ABCD$?
- (d) **Halla las dimensiones que maximizan el área de $ABCD$.**

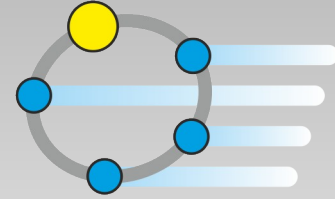




Posible modelo

En Vista Gráfica 1:

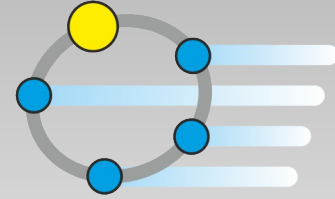
- $C = \text{Circunferencia}[0, 1]$
- Insertar deslizador t
- $A = (-t, \text{sqrt}(1 - t^2))$
- $B = (t, \text{sqrt}(1 - t^2))$
- $C = (t, -\text{sqrt}(1 - t^2))$
- $D = (-t, -\text{sqrt}(1 - t^2))$
- $Pol = \text{Polígono}[A, B, C, D]$



Posible modelo

En Vista Gráfica 2:

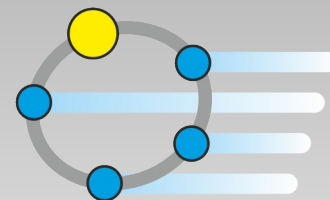
- $E = (t, \text{area}(Pol))$
- $Area = \text{Función} [\text{abs}(2x^2 \sqrt{1 - x^2}), -1, 1]$
- $r = \text{Tangente}[E, Area]$
- $m = \text{Pendiente}[r]$
- $F = (t, m)$
- $DerivArea = \text{Derivada}[Area]$



Enseñar Análisis con GeoGebra

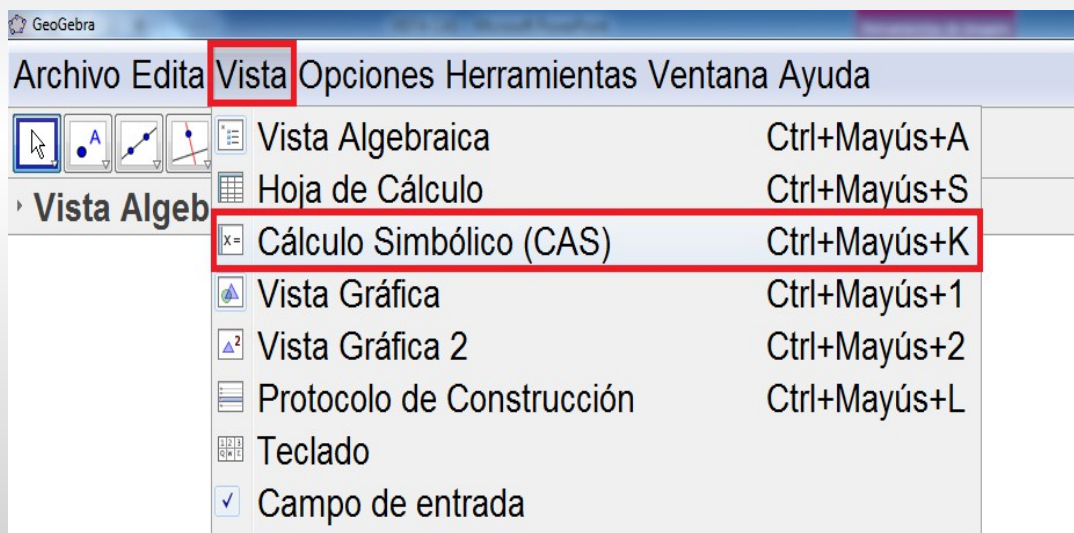
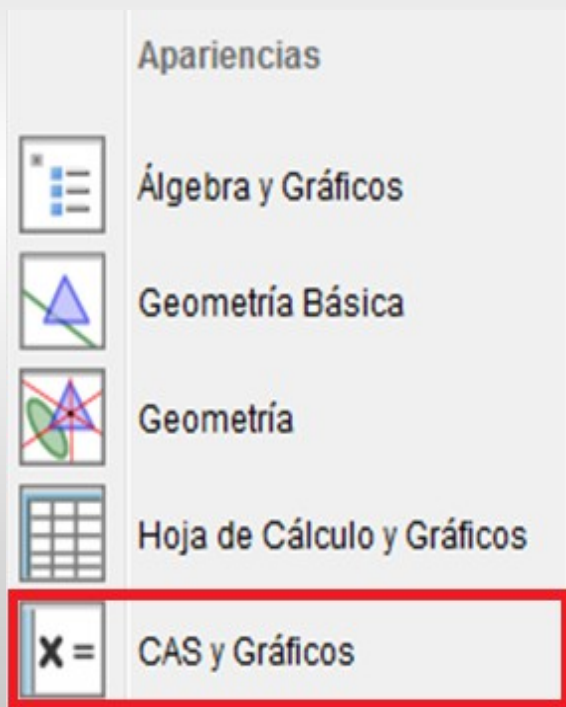
Aprovechamiento didáctico

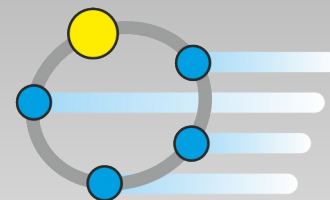
Vista CAS



Vista CAS

GeoGebra incorpora el CAS a partir de la versión 4.2





Vista CAS - Barra de herramientas

The image shows the GeoGebra CAS (Computer Algebra System) view toolbar. The toolbar includes icons for various mathematical operations. A large blue arrow points from the toolbar to the text "Vista CAS".

Opciones de Salida (Output Options): Includes the equals sign ($=$), the approximation symbol ($\approx$), and the checkmark ($\checkmark$).

Deriva o integra la expresión ingresada (Differentiate or integrate the entered expression): Represented by the integral symbol ($\int$).

Proporciona un **valor aproximado** para una de las incógnitas de una ecuación o sistema de ecuaciones. (Provides an approximate value for one of the unknowns of an equation or system of equations): Represented by the solve icon (a square with a checkmark).

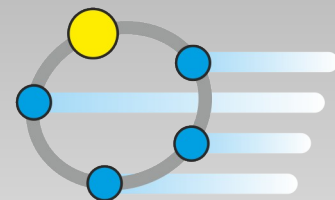
Resuelve una ecuación o un sistema de ecuaciones (Solve an equation or a system of equations): Represented by the solve icon (a square with a checkmark).

Sustituye una variable por un valor específico u otra expresión algebraica (Substitute a variable with a specific value or another algebraic expression): Represented by the substitute icon (a square with a checkmark).

Desarrolla expresiones numéricas y algebraicas (Expand numerical and algebraic expressions): Represented by the expand icon (a square with a checkmark).

Factoriza expresiones numéricas y algebraicas (Factorize numerical and algebraic expressions): Represented by the factorize icon (a square with a checkmark).

Entrada: (Input): The input field at the bottom of the toolbar.



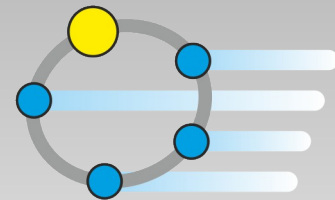
Vista CAS – Nociones básicas

Las operaciones y resultados aparecen numerados por filas, de manera similar a otros programas de CAS.

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$2(x-7)-4(x+1)$
○	$\rightarrow -2x - 18$
2	

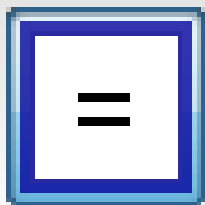
Entrada

Salida

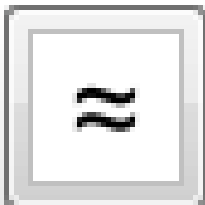


Vista CAS – Nociones básicas

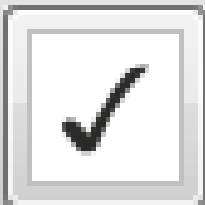
Opciones de salida:



Evalúa

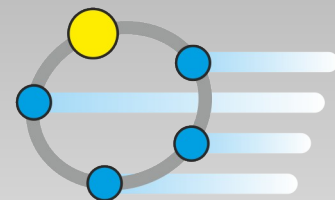


**Valor
numérico**



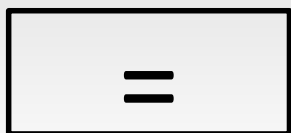
**Conserva la
entrada**

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$(\sqrt{5}-1)^2/2$ ☐ $\rightarrow -\sqrt{5} + 3$
2	$(\sqrt{5}-1)^2/2$ ☐ ≈ 0.76
3	$(\sqrt{5}-1)^2/2$ ☒ $\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}$

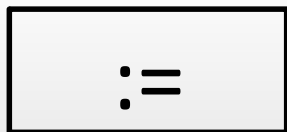


Vista CAS – Nociones básicas

Igualdades:



Define una ecuación

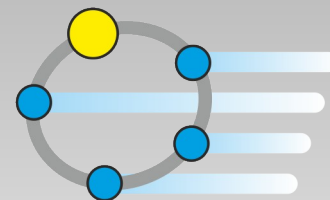


Asigna un valor a una variable



Plantea una proposición lógica

1	$a=3$ $\rightarrow \mathbf{a = 3}$
2	$2a$ $\rightarrow \mathbf{2 a}$
3	$a:=3$ $\rightarrow \mathbf{a := 3}$
4	$2a$ $\rightarrow \mathbf{6}$
5	$2a==8$ $\rightarrow \mathbf{false}$



Vista CAS – Nociones básicas

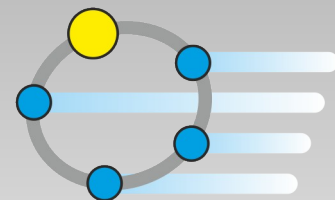
The screenshot displays the GeoGebra CAS interface with three main panels:

- Vista Algebraica**: Shows the function $f(x) = x^2 + 2x + 1$ under the heading "Función".
- Cálculo Simbólico (CAS)**: Shows the function definition $f(x) := x^2 + 2x + 1$ in two rows, with a button (a small circle) next to the first row.
- Vista Gráfica**: Shows a graph of the parabola $f(x) = x^2 + 2x + 1$ on a coordinate plane. The x-axis ranges from -5 to 5, and the y-axis ranges from 0 to 10. The parabola opens upwards with its vertex at (-1, 0).

A blue callout box points to the button in the CAS panel, containing the text:

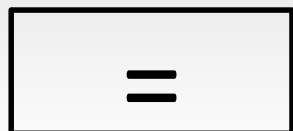
Al activar el **botón** se define una función que vemos en la vista algebraica y la vista gráfica.

At the bottom of the interface is an "Entrada:" input field.

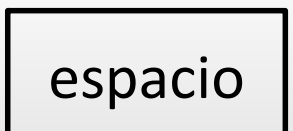


Vista CAS – Nociones básicas

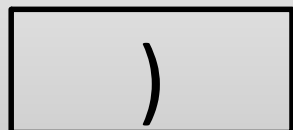
Repeticiones de otros resultados:



Reitera la entrada
previa

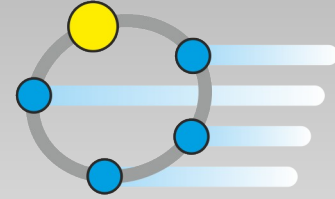


Reitera la salida previa



Reitera la salida previa
entre paréntesis

1	$4x-1=x+8$
○	$\rightarrow 4x - 1 = x + 8$
2	$(4x - 1 = x + 8) - x$
○	$\rightarrow 3x - 1 = 8$
3	$(3x - 1 = 8) + 1$
○	$\rightarrow 3x = 9$
4	$(3x = 9) / 3$
○	$\rightarrow x = 3$



Vista CAS – Nociones básicas

Referencias a otros resultados

Estáticas

#

salida previa

#3

salida fila 3

##

entrada previa

##3

entrada fila 3

Dinámicas

\$

salida previa

\$3

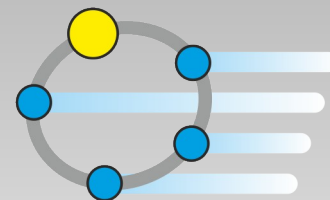
salida fila 3

\$\$

entrada previa

\$\$3

entrada fila 3



Vista CAS – Nociones básicas

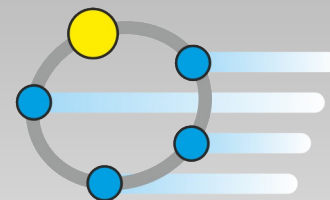
Referencias a otros resultados

ESTÁTICA

DINÁMICA

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$4x+3x$
☐	$\rightarrow 7x$
2	$7x$
☐	$\rightarrow 7x$
3	$\$1$
☐	$\rightarrow 7x$

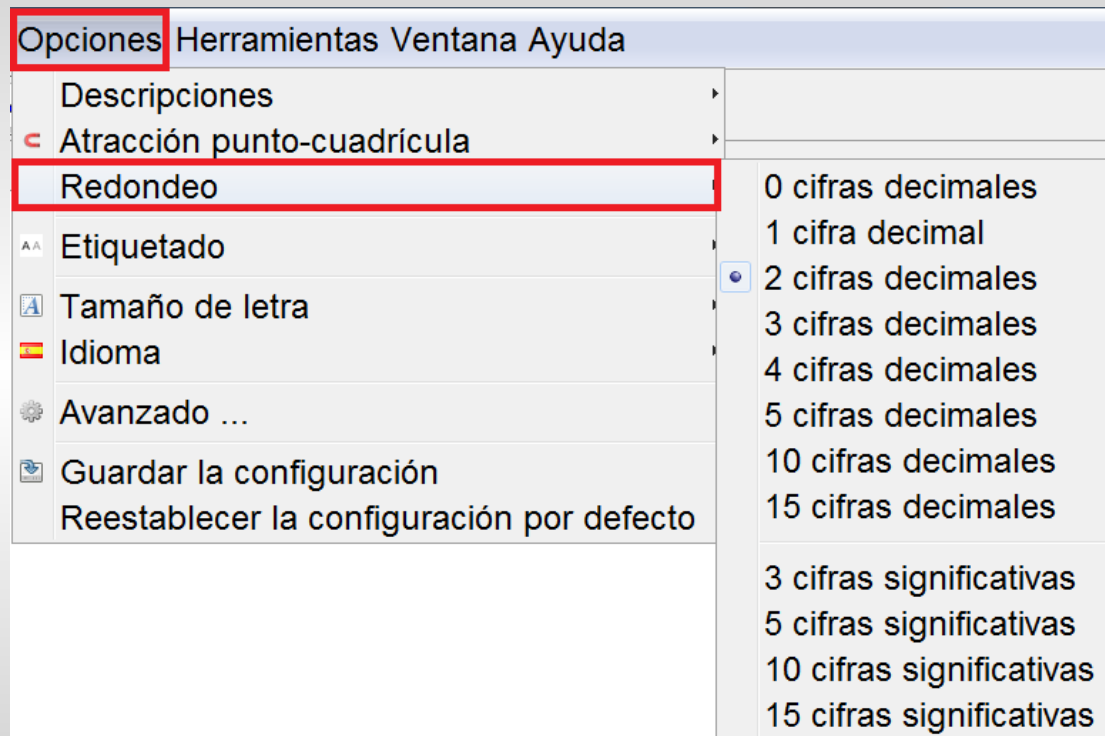
Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$4x \ 3x$
☒	$\rightarrow 12x^2$
2	$7x$
☐	$\rightarrow 7x$
3	$\$1$
☐	$\rightarrow 12x^2$

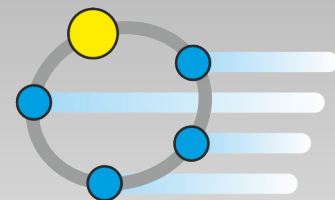


Vista CAS – Nociones básicas

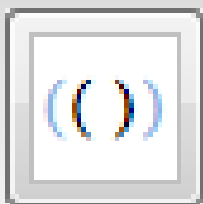
Redondeo

En el menú Opciones, Redondeo, se establece el número de cifras decimales para los valores numéricos o cálculos aproximados.





Desarrollo



Desarrolla

► **Cálculo Simbólico (CAS)**

1 $(x+1)^2 - 3(x+1)$

○ Desarrolla: $(x+1)^2 - (3x+3)$

► **Cálculo Simbólico (CAS)**

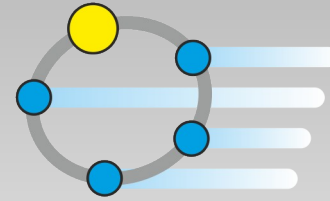
1 Desarrolla $[(x+2)^3]$

○ $\rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

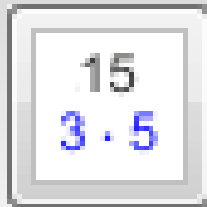
2 $(x+2)^3$

○ Desarrolla: $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Desarrolla [expresión]



Factorización



Factoriza

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	10!
○	→ 3628800
2	(3628800)
○	Factoriza: $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$
3	x^2+2x+1
○	Factoriza: $(x+1)^2$

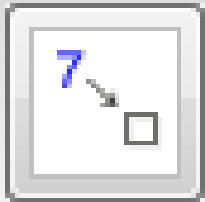
Cálculo Simbólico (CAS)	
1	10!
○	→ 3628800
2	Factoriza[3628800]
○	→ $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$
3	Factoriza[x^2+2x+1 ,x]
○	→ $(x+1)^2$

Factoriza [*expresión*]

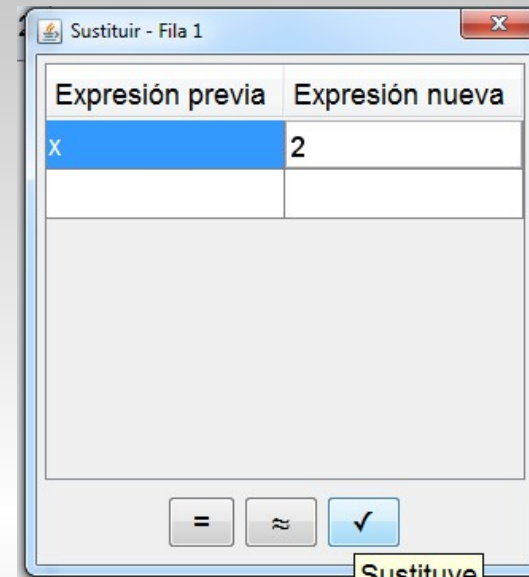
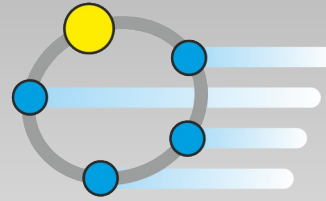
Factoriza [*número*]

Factoriza [*expresión, variable*]

Sustitución



Sustituye

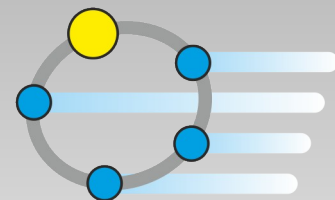


Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$x^2 - 4x + 16$
•	$\rightarrow x^2 - 4x + 16$
2	<code>Sustituye[(x^2-4x+16),x,2]</code>
○	$\rightarrow 12$
3	<code>Sustituye[(x^2-4x+16),x=2]</code>
○	$\rightarrow 12$

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$x^2 - 4x + 16$
○	<code>Sustituye, x=2: 12</code>

Sustituye [*expresión, variable, valor*]

Sustituye [*expresión, lista de reemplazos*]



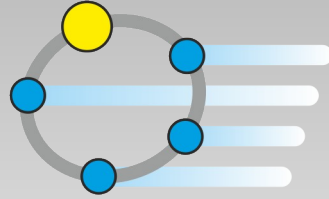
Actividad 3

- **a)** Resolver paso a paso la ecuación $3x = 7x - \sqrt{2}$.

Obtener una respuesta exacta y también aproximada a cuatro cifras significativas.

- **b)** Investigar si es cierto que

$$(x + a)^7 + x^7 - a^7 = 7xa(x + a)(x^2 + xa + a^2)^2$$



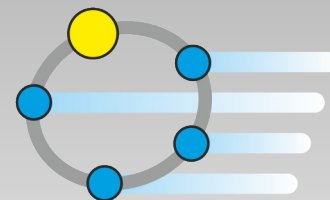
Actividad 3

c) Demostrar que si a y b son dos números naturales consecutivos, entonces la siguiente expresión es un cuadrado perfecto:

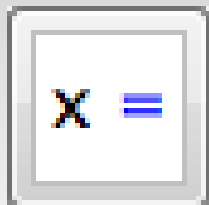
$$a^2 + b^2 + (ab)^2$$

d) Ingresar la fórmula de resolución de ecuaciones de segundo grado y, mediante sustituciones, resolver:

$$2x^2 - 7x - 6 = 0$$



Resolución de ecuaciones



Resuelve

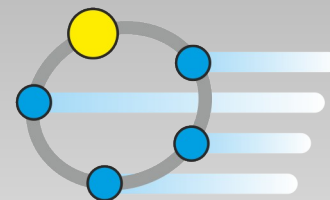
Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$(x-1)(x+2)x$
○	$\rightarrow x^3 + x^2 - 2x$
2	$\text{Resuelve}[(x^3 + x^2 - 2x)]$
○	$\rightarrow \{x = -2, x = 0, x = 1\}$
3	$\text{Soluciones}[(x^3 + x^2 - 2x)]$
○	$\rightarrow \{-2, 0, 1\}$
4	$\text{Raíz}[(x^3 + x^2 - 2x)]$
○	$\rightarrow \{x = -2, x = 0, x = 1\}$

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$x^3 + x^2 - 2x$
○	$\text{Resuelve: } \{x = -2, x = 0, x = 1\}$

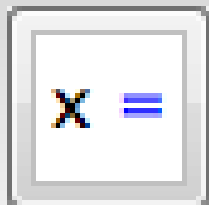
Resuelve [ecuación]

Soluciones [ecuación]

Raíz [ecuación]



Resolución de ecuaciones



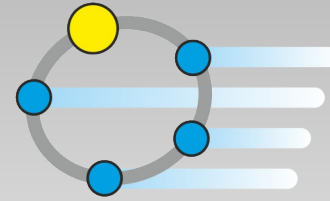
Resuelve

RaízCompleja [*polinomio*]

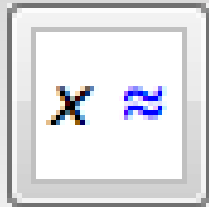
SolucionesC [*ecuación*]

ResoluciónC [*ecuación*]

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	Resuelve[x^4-1] → $\{x = -1, x = 1\}$
2	ResoluciónC[x^4-1] → $\{x = -1, x = 1, x = i, x = -i\}$
3	Soluciones[x^4-1] → $\{-1, 1\}$
4	SolucionesC[x^4-1] → $\{-1, 1, i, -i\}$
5	Raíz[x^4-1] → $\{x = -1, x = 1, x = i, x = -i\}$
6	RaízCompleja[x^4-1] → $\{-i, -1, i, 1\}$



Resolución numérica de ecuaciones



Resolución numérica

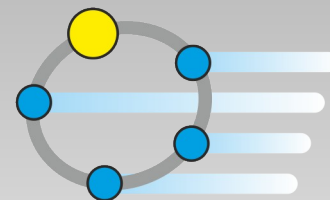
SolucionesN [*ecuación, variable*]

SolucionesN [*ecuación, variable = valor inicial*]

ResoluciónN [*ecuación, variable*]

ResoluciónN [*ecuación, variable = valor inicial*]

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$x^2 - 2 = 0$
○	$\rightarrow x^2 - 2 = 0$
2	Soluciones[($x^2 - 2 = 0$)]
○	$\rightarrow \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
3	SolucionesN[($x^2 - 2 = 0$)]
○	$\rightarrow \{-1.41, 1.41\}$



Cálculo de Límites

Límite [*expresión, valor*]

Límite [*expresión, variable, valor*]

▸ Cálculo Simbólico (CAS)

1	Límite[1/x,4]
○	→ $\frac{1}{4}$
2	Límite[1/x,-∞]
○	→ 0

▸ CAS - Cálculo simbólico

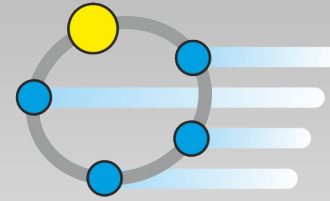
1	LímiteDerecha[1/x,0]
○	→ ∞
2	Límitelzquierda[1/x,0]
○	→ $-\infty$
3	Límite[1/x,0]
○	→ ?

LímiteDerecha [*expresión, valor*]

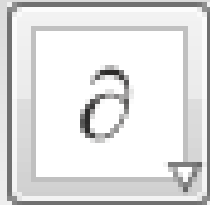
LímiteDerecha [*expresión, variable, valor*]

Límitelzquierda [*expresión, valor*]

Límitelzquierda [*expresión, variable, valor*]



Derivabiliad



Derivada

► Cálculo Simbólico (CAS)

1	$x \cos(x)$
○	Derivada: $\cos(x) - x \sin(x)$

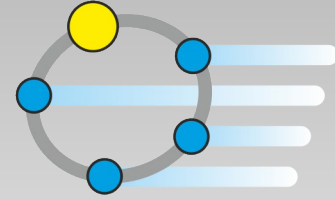
► Cálculo Simbólico (CAS)

1	Derivada[x cos(x)]
○	→ $\cos(x) - x \sin(x)$
2	Derivada[x cos(x), x]
○	→ $\cos(x) - x \sin(x)$
3	Derivada[x cos(x), x, 2]
○	→ $-2 \sin(x) - x \cos(x)$

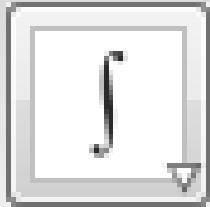
Derivada (*expresión*)

Derivada (*expresión, variable*)

Derivada (*expresión, variable, orden*)



Integrabilidad



Integral

2	x^2+2x
○	Integral: $\frac{1}{3} x^3 + x^2 + c_2$

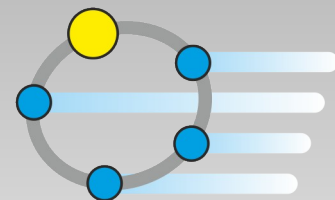
▶ Cálculo Simbólico (CAS) ✕	
1	Integral[x^2+2x]
○	→ $\frac{1}{3} x^3 + x^2 + c_1$

Integral (*expresión*)

Integral (*expresión, variable*)

Integral (*expresión, valor inicial, valor final*)

Integral (*expresión, variable, valor inicial, valor final*)

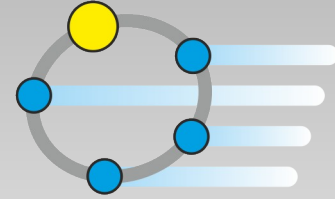


Actividad 4

a) Estudiar los límites laterales de la función $h : h(x) = \operatorname{sg}(\operatorname{sen}(x))$ en $x = \pi$.

b) Hallar los valores de a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en $x = 0$.

$$f : f(x) = \begin{cases} a(1 + e^x) & ; \text{ si } x < 0 \\ b + \ln(x + 1) & ; x \geq 0 \end{cases}$$

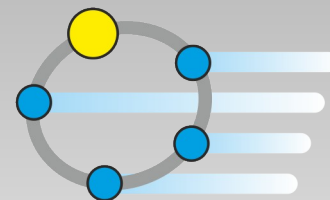


Actividad 4

c) Se consideran las funciones dadas por:

$$f(x) = \text{sen}(x) \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x}{3} + 3.$$

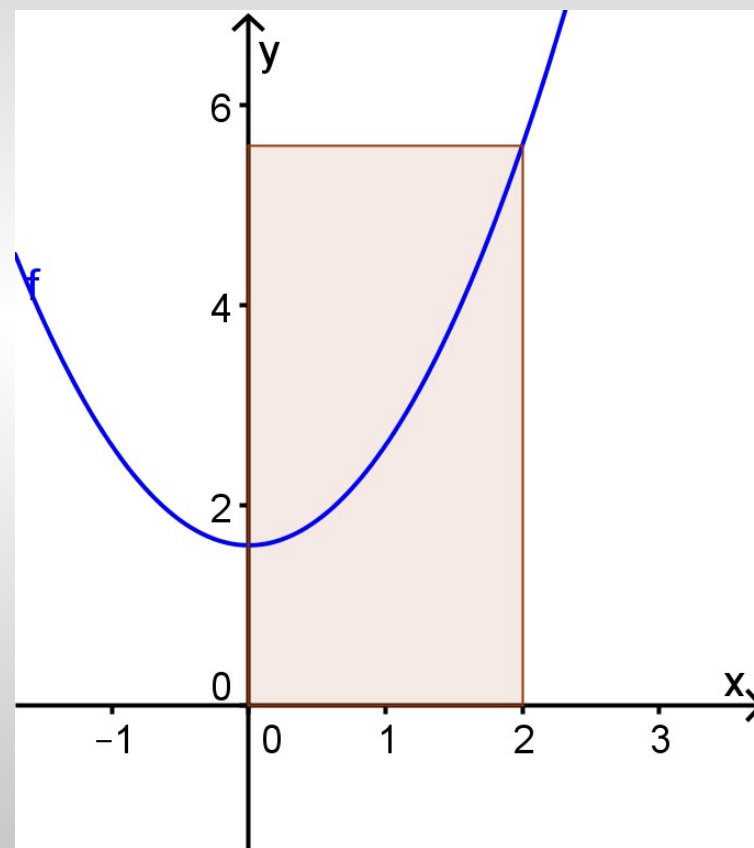
Calcular el área de la región comprendida entre ambos gráficos en el dominio $[1; 4)$. Representarlo gráficamente.

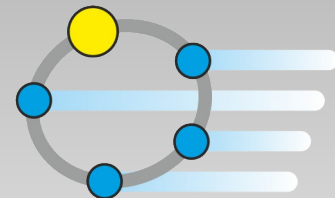


Actividad 4

- d) La siguiente figura muestra:
 - El gráfico de la función f dada por $f(x) = x^2 + a$, donde a es un número real positivo.
 - El rectángulo de vértices $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(2; 4 + a)$ y $(0; 4 + a)$.

Halla el valor de a para que el gráfico de f divida al rectángulo en dos regiones de igual área.





¡Muchas gracias!

Gonzalo Galván

Sebastián Parodi

Fabián Vitabar

Instituto GeoGebra de Uruguay